estesa, è chiaro che le conseguenze della dimostrazione acquistano una generalità più grande di quella che si cercava. In questo caso può benissimo succedere che alcune di tali conseguenze sembrino-inconciliabili colla natura degli enti specialmente contemplati, in quanto che certe proprietà che sussistono generalmente per una data categoria di enti -possono modificarsi notabilmente od anche scomparire affatto per alcuni di essi in particolare. Se ciò avviene, i risultati della fatta investigazione presentano delle apparenti incongruenze, di cui la mente non può rendersi capace, se prima non siasi resa conscia della base troppo generale data alla sua investigazione.

Ciò premesso, consideriamo quelle dimostrazioni della planimetria che si fondano unicamente sull'uso del principio di sovrapposizione e sul postulato della retta, quali sono appunto quelle della planimetria non-euclidea. I risultati di queste dimostrazioni valgono incondizionatamente in tutti quei casi nei quali sussistono quel principio e quel postulato. Questi casi sono tutti necessariamente compresi, per quanto si è veduto, nella dottrina delle superficie di curvatura costante, ma non possono verificarsi che per quelle fra queste superficie, in cui non ha luogo alcuna eccezione alle ipotesi di quelle dimostrazioni. La sussistenza del principio di sovrapposizione non patisce eccezione per alcuna delle dette superficie. Ma rispetto al postulato della retta (o per meglio dire della geodetica) abbiamo già notato che si incontrano delle eccezioni sulla sfera, e per conseguenza su tutte le superficie di curvatura costante positiva. Ora queste eccezioni esistono anche sulle superficie di curvatura costante negativa ? Vale a dire, può egli darsi il caso, su queste ultime superficie, che due punti non determinino una sola ed individuata linea geodetica ?

Questa quistione non è, per quel ch'io sappia, ancora stata esaminata. Se si può provare che tali eccezioni non sono possibili, diventa evidente *a priori* che i teoremi della planimetria non-euclidea sussistono incondizionatamente per tutte le superficie di curvatura costante negativa. Allora certi risultai che sembravano incompatibili coll'ipotesi del piano possono diventar conciliabili con quella di una superficie della specie anzi-detta, e ricevere da essa ima spiegazione non meno semplice che sodisfacente. In pari tempo le determinazioni che producono il passaggio dalla planimetria non-euclidea alla euclidea possono spiegarsi con quelle che individuano la superficie di curvatura nulla nella serie delle superficie di curvatura costante negativa.

Tali sono le considerazioni che ci hanno servito di guida nelle ricerche seguenti.

La formola

f , , 2____ P2 $(X - v^2)\, d u^2 + 2 u v\, d u\, d v + (a^2 - u^2)\, dv^2$

*(i)* *ds —K* <y _ *tf* _ *v*y*

rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie la cui curvatura sferica